

“反转参数” 解题剖析

福建省南安市侨光中学 郑海萍

摘要: 在高中数学琳琅满目的题型中, 我们经常会碰到带有参数的问题, 在一些看似棘手的问题面前, 若能换个角度看参数, 转变一下题中参数的角色地位, 或许将为解题另辟蹊径, 取得理想的效果。

关键词: 高中数学 参数问题 转变角色

例 1、若不等式 $2x-1 > mx^2 - m$ 对满足 $-2 \leq m \leq 2$ 的所有 m 都成立, 求 x 的范围。

分析: 习惯上把 x 当作自变量, 记函数 $y = mx^2 - 2x + 1 - m$, 于是问题转化为当 $-2 \leq m \leq 2$ 时, $y < 0$ 恒成立, 求 x 的范围。解决这个问题需要应用二次函数以及二次方程实根分布原理, 这是比较复杂的。对于这种题型, 我们较熟悉, 只需把 x 与 m 两个量互换一下角色, 将 m 视为变量, x 为常量, 即“反转参数”, 则上述问题可转化为关于 m 的一次函数在 $[-2, 2]$ 内小于 0 恒成立的问题。

解: 将不等式化为: $m(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0$,

构造一次型函数: $g(m) = (x^2 - 1)m - (2x - 1)$

原命题等价于对满足 $-2 \leq m \leq 2$ 的 m , 使 $g(m) < 0$ 恒成立。

由函数图象是一条线段, 知应 $\begin{cases} g(-2) < 0 \\ g(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0 \\ 2(x^2 - 1) - (2x - 1) < 0 \end{cases}$

解得 $\frac{-1+\sqrt{7}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, 所以 x 的范围是 $x \in (\frac{-1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$ 。

评析: 解题的关键是将看来是解关于 x 的不等式问题转化为以 m 为变量, x 为参数的一次函数恒成立问题, 再利用一次函数的图象或单调性解题。

对于以下问题, 乍一看, 束手无策, 但若参照以上“反转参数”的办法, 则问题仍可迎刃而解。

例 2、设 $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, 若 $|f(0)| \leq 1, |f(1)| \leq 1, |f(-1)| \leq 1$, 试证明: 对于任意 $-1 \leq x \leq 1$, 有 $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ 。

分析: 此处若强行通过已知条件求参数 a, b, c 的范围, 再去证明 $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$, 显然困难重重。若能转变一下参数 a, b, c 的地位, 可以用 $f(0), f(1), f(-1)$ 来表示参数 a, b, c . 即可为解题打开突破口。

解: $\because f(-1) = a - b + c, f(1) = a + b + c, f(0) = c,$

$$\therefore a = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1) - 2f(0)), b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)), c = f(0),$$

$$\therefore f(x) = f(1)\left(\frac{x^2+x}{2}\right) + f(-1)\left(\frac{x^2-x}{2}\right) + f(0)(1-x^2).$$

$\therefore$ 当 $-1 \leq x \leq 0$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(1)| \cdot \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + |f(-1)| \cdot \left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |f(0)| \cdot |1-x^2| \\ &\leq \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |1-x^2| \\ &= -\left(\frac{x^2+x}{2}\right) + \left(\frac{x^2-x}{2}\right) + (1-x^2) \\ &= -x^2 - x + 1 \\ &= -(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(1)| \cdot \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + |f(-1)| \cdot \left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |f(0)| \cdot |1-x^2| \\ &\leq \left|\frac{x^2+x}{2}\right| + \left|\frac{x^2-x}{2}\right| + |1-x^2| \\ &= \left(\frac{x^2+x}{2}\right) + \left(\frac{-x^2+x}{2}\right) + (1-x^2) \\ &= -x^2 + x + 1 \\ &= -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

综上, 问题获证.

评析: 此处有效利用 $|f(0)| \leq 1, f(1) \leq 1, f(-1) \leq 1$, 充分结合对称轴处的函数值的绝对值比端点函数值得绝对值要小而达到去绝对值的目的, 解法创新, 过程简洁. 当然, 解题中应对定义域进行分段讨论, 力求求解准确合理.

例 3、 已知二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有 $-1 \leq f(x) \leq 1$, 求证: 当 $-2 \leq x \leq 2$ 时, 有 $-7 \leq f(x) \leq 7$.

分析: 研究 $f(x)$ 的性质, 最好能够得出其解析式, 从这个意义上说, 应该尽量用已知条件来表达参数 a, b, c . 确定三个参数, 只需三个独立条件, 本题可以考虑 $f(1), f(-1), f(0)$, 这样做的好处有两

个：一是 a, b, c 的表达较为简洁，二是由于 ± 1 和 0 正好是所给条件的区间端点和中点，这样做能够较好地利用条件来达到控制二次函数范围的目的。

解：由题意知： $f(-1) = a - b + c, f(0) = c, f(1) = a + b + c$,

$$\therefore a = \frac{1}{2}(f(1) + f(-1) - 2f(0)), \quad b = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)), \quad c = f(0),$$

$$\therefore f(x) = ax^2 + bx + c = f(1)\left(\frac{x^2 + x}{2}\right) + f(-1)\left(\frac{x^2 - x}{2}\right) + f(0)(1 - x^2).$$

由 $-1 \leq x \leq 1$ 时，有 $-1 \leq f(x) \leq 1$ ，可得 $|f(1)| \leq 1, |f(-1)| \leq 1, |f(0)| \leq 1$.

$$\therefore |f(2)| = |3f(1) + f(-1) - 3f(0)| \leq 3|f(1)| + |f(-1)| + 3|f(0)| \leq 7,$$

$$|f(-2)| = |f(1) + 3f(-1) - 3f(0)| \leq |f(1)| + 3|f(-1)| + 3|f(0)| \leq 7.$$

(1) 若 $-\frac{b}{2a} \notin [-2, 2]$ ，则 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调，故当 $x \in [-2, 2]$ 时，

$$|f(x)|_{\max} = \max(|f(-2)|, |f(2)|) \quad \therefore \text{此时问题获证.}$$

(2) 若 $-\frac{b}{2a} \in [-2, 2]$ ，则当 $x \in [-2, 2]$ 时，

$$|f(x)|_{\max} = \max(|f(-2)|, |f(2)|, \left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right|)$$

$$\text{又 } \left|f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right| = \left|c - \frac{b^2}{4a}\right| \leq |c| + \left|\frac{b}{2a}\right| \cdot \left|\frac{b}{2}\right| = |f(0)| + \left|\frac{b}{2a}\right| \cdot \left|\frac{f(1) - f(-1)}{4}\right| \leq 1 + 2 \cdot \frac{1+1}{4} = 2 < 7,$$

$\therefore$ 此时问题获证.

综上所述：当 $-2 \leq x \leq 2$ 时，有 $-7 \leq f(x) \leq 7$.

总之，虽然含有参数的题目解题方法千变万化，但适时地利用“反转参数”的办法也不失为一剂解题良方。