

例谈方案设计型问题

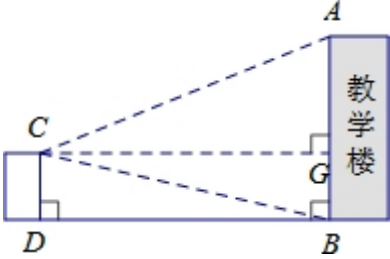
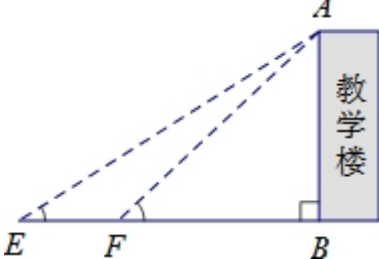
福建省泉州市南安侨光中学 许明华 362300

方案设计型问题应用性非常突出，题目一般较长，做题之前要认真读题，选择和构造合适的数学模型，注重综合运用转化思想、数形结合的思想、方程函数思想及分类讨论等各种数学思想。

考点一：设计测量方案问题

这类问题主要包括物体高度的测量和地面宽度的测量。所用到的数学知识主要有相似、全等、三角形中位线、投影、解直角三角形等。

例 1 某校数学课题学习小组在“测量教学楼高度”的活动中，设计了以下两种方案：

课题	测量教学楼高度	
方案	一	二
图示		
测得数据	CD=6.9m, $\angle ACG=22^\circ$, $\angle BCG=13^\circ$,	EF=10m, $\angle AEB=32^\circ$, $\angle AFB=43^\circ$
参考数据	$\sin 22^\circ \approx 0.37$, $\cos 22^\circ \approx 0.93$, $\tan 22^\circ \approx 0.40$ $\sin 13^\circ \approx 0.22$, $\cos 13^\circ \approx 0.97$ $\tan 13^\circ \approx 0.23$	$\sin 32^\circ \approx 0.53$, $\cos 32^\circ \approx 0.85$, $\tan 32^\circ \approx 0.62$ $\sin 43^\circ \approx 0.68$, $\cos 43^\circ \approx 0.73$, $\tan 43^\circ \approx 0.93$

请你选择其中的一种方法，求教学楼的高度（结果保留整数）

解：若选择方法一，解法如下：

在 $\text{Rt}\triangle BGC$ 中， $\angle BGC=90^\circ$ ， $\angle BCG=13^\circ$ ， $BG=CD=6.9$ ，

$$\therefore CG = \frac{6.9}{\tan 13^\circ} \approx \frac{6.9}{0.23} = 30,$$

在 $\text{Rt}\triangle ACG$ 中， $\angle AGC=90^\circ$ ， $\angle ACG=22^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle ACG = \frac{AG}{CG},$$

$$\therefore AG = 30 \times \tan 22^\circ \approx 30 \times 0.40 = 12,$$

$$\therefore AB = AG + BG = 12 + 6.9 \approx 19 \text{ (米)}.$$

答：教学楼的高度约 19 米。

若选择方法二，解法如下：

在 $\text{Rt}\triangle AFB$ 中， $\angle ABF=90^\circ$ ， $\angle AFB=43^\circ$ ，

$$\therefore \tan \angle AFB = \frac{AB}{FB},$$

$$\therefore FB = \frac{AB}{\tan 43^\circ} \approx \frac{AB}{0.93},$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\angle ABE=90^\circ$, $\angle AEB=32^\circ$,

$$\therefore \tan \angle AEB = \frac{AB}{EB},$$

$$\therefore EB = \frac{AB}{\tan 32^\circ} \approx \frac{AB}{0.62},$$

$\therefore EF = EB - FB$ 且 $EF = 10$,

$$\therefore \frac{AB}{0.62} - \frac{AB}{0.93} = 10, \text{ 解得 } AB = 18.6 \approx 19 \text{ (米)}.$$

答: 教学楼的高度约 19 米.

考点二: 设计搭配方案问题

这类问题一般给出两种元素, 利用这两种元素搭配出不同的新事物, 设计出方案, 使获利最大或成本最低. 解题时要根据题中蕴含的不等关系, 列出不等式(组), 通过不等式组的整数解来确定方案.

例 2 某校七年级准备购买一批笔记本奖励优秀学生, 在购买时发现, 每本笔记本可以打九折, 用 360 元钱购买的笔记本, 打折后购买的数量比打折前多 10 本.

(1) 求打折前每本笔记本的售价是多少元?

(2) 由于考虑学生的需求不同, 学校决定购买笔记本和笔袋共 90 件, 笔袋每个原售价为 6 元, 两种物品都打九折, 若购买总金额不低于 360 元, 且不超过 365 元, 问有哪几种购买方案?

解: (1) 设打折前售价为 x , 则打折后售价为 $0.9x$,

$$\text{由题意得, } \frac{360}{x} + 10 = \frac{360}{0.9x},$$

解得: $x=4$,

经检验得: $x=4$ 是原方程的根,

答: 打折前每本笔记本的售价为 4 元.

(2) 设购买笔记本 y 件, 则购买笔袋 $(90-y)$ 件,

由题意得, $360 \leq 4 \times 0.9 \times y + 6 \times 0.9 \times (90-y) \leq 365$,

$$\text{解得: } 67\frac{2}{9} \leq y \leq 70,$$

$\therefore x$ 为正整数,

$\therefore x$ 可取 68, 69, 70,

故有三种购买方案:

方案一: 购买笔记本 68 本, 购买笔袋 22 个;

方案二: 购买笔记本 69 本, 购买笔袋 21 个;

方案三: 购买笔记本 70 本, 购买笔袋 20 个;

点评: 本题考查了分式方程的应用、一元一次不等式组的应用, 一定要先仔细审题, 有时需要读上几遍, 找到解题需要的等量关系或不等关系.

考点三: 设计销售方案问题

在商品买卖中, 更多蕴含着数学的学问. 通过计算不同的销售方案盈利情况, 可以帮助我们明白更多的道理. 近来还出现运用概率统计知识进行设计的问题.

例 3 四川省第十二届运动会将于 2014 年 8 月 18 日在我市隆重开幕, 根据大会组委会安排, 某校接受了开幕式大型团体操表演任务. 为此, 学校需要采购一批演出服装, A、B 两家制衣公司都愿成为这批服装的供应商. 经了解, 两家公司生产的这款演出服装的质量和单价都相同, 即男装每套 120 元, 女装每套 100 元. 经洽谈协商: A 公司给出的优惠条件是, 全部服装按单价打七折, 但校方需承担 2200 元的运费; B 公司的优惠条件是男女装均按每套 100 元打八折, 公司承担运费. 另外根据大会组委会要求, 参加演出的女生人数应是男生人数的 2 倍少 100 人, 如果设参加演出的男生有 x 人.

(1) 分别写出学校购买 A、B 两公司服装所付的总费用 y_1 (元) 和 y_2 (元) 与参演男生人数 x 之间的函

数关系式；

(2) 问：该学校购买哪家制衣公司的服装比较合算？请说明理由。

解：(1) 总费用 y_1 (元) 和 y_2 (元) 与参演男生人数 x 之间的函数关系式分别是：

$$y_1 = 0.7[120x + 100(2x - 100)] + 2200 = 224x - 4800,$$

$$y_2 = 0.8[100(3x - 100)] = 240x - 8000;$$

(2) 由题意，得

当 $y_1 > y_2$ 时，即 $224x - 4800 > 240x - 8000$ ，解得： $x < 200$

当 $y_1 = y_2$ 时，即 $224x - 4800 = 240x - 8000$ ，解得： $x = 200$

当 $y_1 < y_2$ 时，即 $224x - 4800 < 240x - 8000$ ，解得： $x > 200$

即当参演男生少于 200 人时，购买 B 公司的服装比较合算；

当参演男生等于 200 人时，购买两家公司的服装总费用相同，可任一家公司购买；

当参演男生多于 200 人时，购买 A 公司的服装比较合算。

点评：本题考查了根据条件求一次函数的解析式的运用，运用不等式求设计方案的运用，根据数量关系求出解析式是关键，建立不等式计算优惠方案是难点。

考点四：设计图案问题

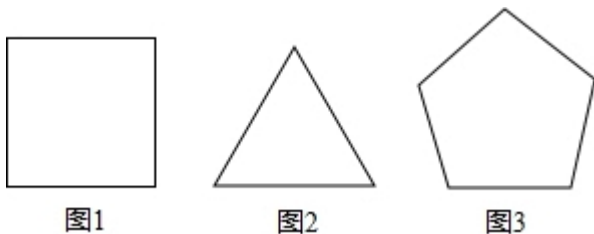
图形的分割、拼接问题是考查动手操作能力与空间想象能力的一类重要问题，大多具有一定的开放性，要求学生多角度、多层次的探索，以展示思维的灵活性、发散性、创新性。

例 4 下面给出的正多边形的边长都是 20cm，请分别按下列要求设计一种剪拼方法（用虚线表示你的设计方案，把剪拼线段用粗黑实线，在图中标注出必要的符号和数据，并作简要说明。

(1) 将图 1 中的正方形纸片剪拼成一个底面是正方形的直四棱柱模型，使它的表面积与原正方形面积相等；

(2) 将图 2 中的正三角形纸片剪拼成一个底面是正三角形的直三棱柱模型，使它的表面积与原正三角形的面积相等；

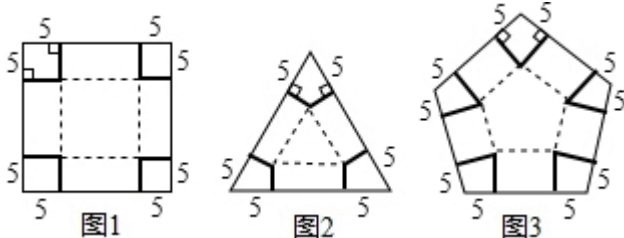
(3) 将图 3 中的正五边形纸片剪拼成一个底面是正五边形的直五棱柱模型，使它的表面积与原正五边形的面积相等。



解：(1) 如图 1，沿黑线剪开，把剪下的四个小正方形拼成一个正方形，再沿虚线折叠即可；

(2) 如图 2，沿黑线剪开，把剪下的三部分拼成一个正三角形，再沿虚线折叠即可；

(3) 如图 3，沿黑线剪开，把剪下的五部分拼成一个正五边形，再沿虚线折叠即可。



点评：本题考查了图形的剪拼，解题的关键在于根据拼成棱柱的表面积与原图形的面积相等，从而判断出剪下的部分拼成的图形应该是棱柱的一个底面。