

函数奇偶性质的应用

福建省南安市侨光中学 郑海萍

我们经常会碰到一些函数，乍一看，没有比较明显的性质，研究起来颇为棘手，但若能细心观察，不难发现其中隐含着诸多关系，尤其是函数的奇偶性更为常见。若能充分利用函数隐含的奇偶性，或将是解题的重要突破口。

例如以下两个函数：

$$(1) f(x) = x \cdot \log_a(\sqrt{x^2+1}-x); \quad (2) f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1}$$

解析：（1）函数定义域为 $\mathbb{R}$ （满足关于原点对称），且

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \cdot \log_a(\sqrt{x^2+1}+x) = (-x) \cdot \log_a \frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x} \\ &= (-x) \cdot \log_a \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = (-x) \cdot \log_a (\sqrt{x^2+1}-x)^{-1} = x \cdot \log_a (\sqrt{x^2+1}-x) = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为偶函数。

（2）易知函数定义域为 $\mathbb{R}$ （满足关于原点对称），若直接求 $f(-x)$ ，再与 $f(x)$ 进行比较判断，则较为困难。事实上， $f(-x) + f(x) =$

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-x-1}{\sqrt{1+x^2}-x+1} + \frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1} = \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - (x+1)^2 + (\sqrt{1+x^2})^2 - (x-1)^2}{(\sqrt{1+x^2}+1)^2 - x^2} = 0,$$

即 $f(-x) = -f(x)$ ，故 $f(x)$ 为奇函数。

评析：以上两个函数看似没有什么性质，而通过观察判断，能挖掘出其隐含的奇偶性，尤其是第二个函数，判断其奇偶性还应利用 $f(-x) + f(x) = 0$ 这一等价形式，而一旦找到了函数奇偶性这层关系，将为进一步解题提供有利条件。

例 1、设 $f(x) = 2 + \frac{\lg(x + \sqrt{x^2+1})}{x^2+1}$ 在 $\mathbb{R}$ 上的最大值为 A ，最小值为 B ，则 $A+B =$

_____.

解析：令 $g(x) = \frac{\lg(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x^2 + 1}$ ，则 $g(-x) = -g(x)$ ，所以 $g(x)$ 为奇函数，于是，

$$[g(x)]_{\max} + [g(x)]_{\min} = 0, \text{ 则 } A + B = 2 + [g(x)]_{\max} + 2 + [g(x)]_{\min} = 4。$$

例 2、方程 $(6x + 5)\left[1 + \sqrt{(6x + 5)^2 + 4}\right] + x(1 + \sqrt{x^2 + 4}) = 0$ 的根为_____。

解析：观察方程左式的结构特征，令 $f(x) = x(1 + \sqrt{x^2 + 4})$ ，则方程即为 $f(6x + 5) + f(x) = 0$ ，由于 $f(x)$ 是 R 上单调递增的奇函数，所以 $6x + 5 + x = 0$ ，得 $x = -\frac{5}{7}$ 为所求方程的根。

例 3、若 $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ ，则 $x + y =$ _____。

解析：将原式两边同时取对数得： $\lg(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \lg(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0$ ，令 $f(x) = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ，则 $f(x) + f(y) = 0$ ，由于 $f(x)$ 是 R 上单调递增的奇函数，则 $x + y = 0$ 。

例 4、求 $\int_{-1}^1 \frac{x \sin^2 x}{x^4 + x^2 + 1} dx$ 的值。

解析：乍一看，此题无从下手，但仔细观察，可以发现函数 $f(x) = \frac{x \sin^2 x}{x^4 + x^2 + 1}$ 为奇函数这个隐含条件，且区间 $[-1, 1]$ 对称，于是结合定积分的几何意义可知 $\int_{-1}^1 \frac{x \sin^2 x}{x^4 + x^2 + 1} dx = 0$ ，解题毫不费力。

例 5、已知函数 $f(x) = 2018^x + \log_{2018}(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 2018^{-x} + 2$ ，则关于 x 的不等式 $f(3x + 1) + f(x) > 4$ 的解集为_____。

解析：令 $g(x) = 2018^x + \log_{2018}(\sqrt{x^2 + 1} + x) - 2018^{-x}$ ，易得 $g(x)$ 是奇函数，且在 R 上单调递增，则不等式 $f(3x + 1) + f(x) > 4$ 可化为 $g(3x + 1) + 2 + g(x) + 2 > 4$ ，即 $g(3x + 1) > -g(x) = g(-x)$ ，所以 $3x + 1 > -x$ ，即 $x > -\frac{1}{4}$ ，所求解集为 $(-\frac{1}{4}, +\infty)$ 。

例 6、对于函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}) \cdot x^3 & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ ，以下说法正确的是_____。

- ① $f(x)$ 在 R 上单调递增； ② 对于任意的 $x \in R$, 都有 $f(x) \geq 0$;
 ③ $f(x)$ 在 R 上单调递减； ④ 当 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 必有 $x_1 + x_2 < 0$

。

解析: 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = (\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}) \cdot x^3$, 易得 $f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 为偶函数, 其图像关于 y 轴对称, 且当 $x > 0$ 时, $2^x - 1 > 0$, 则 $f(x) = (\frac{1}{2^x-1} + \frac{1}{2}) \cdot x^3 > 0$, 由于 $f(x)$ 为偶函数, 故当 $x < 0$ 时, 也有 $f(x) > 0$, 于是正确的只有②。

至此, 不难看出, 函数隐含的奇偶性质对解决此类函数问题起到至关重要的作用, 充分挖掘函数隐含的奇偶性质, 将为解题指引方向。