

“设而不求” 利弊说

福建省南安市侨光中学

郑海萍

“设而不求” 解题法, 就是在解决数学问题时, 先设定一些未知数, 然后把它们当成已知数, 根据题设本身各量间的制约关系, 将未知数消去或代换, 使问题的解决变得简捷、明快。其没有固定的一般形式, 根据问题的具体目标, 利用点的坐标的整体结构, 是设而不求的重要思维方法。

例 1、过点 $P(2,1)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线 PA, PB , 其中 A, B 为切点, 求直线 AB 的方程。

解 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由于过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$, 则:

过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 $A(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $l_{PA}: x_1x + y_1y = 1$,

过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 $B(x_2, y_2)$ 的切线方程为 $l_{PB}: x_2x + y_2y = 1$,

把点 $P(2,1)$ 分别代入即得: $2x_1 + y_1 = 1, 2x_2 + y_2 = 1$,

$\therefore$ 点 A, B 都在直线 $2x + y = 1$ 上, 即所求直线 AB 的方程为 $2x + y - 1 = 0$ 。

评注: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 的坐标只设不求, 整个过程一气呵成, 简单明了。

熟知, “设而不求” 法在圆锥曲线中得到了更广泛的应用, 在求解直线与圆锥曲线相交问题, 特别是涉及到相交弦问题, 最值问题, 定值问题等的时候, 采用“设点代入” 法(即“点差法”)可以避免求交点坐标所带来的繁琐计算, 同时与韦达定理, 中点公式结合起来, 使得对问题的处理变得简单而自然。

例 2、已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, A, B 是椭圆上的两点, 线段 AB 的垂直平分线与 x 轴交于点

$P(x_0, 0)$ 求 x_0 的取值范围。

解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入椭圆方程, 得 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$,

两式作差并整理, 得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \right)$ 。

又直线 AB 的斜率与其垂直平分线的斜率互为负倒数

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = - \left(\frac{\frac{y_1 + y_2}{2}}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_0} \right)^{-1}, \text{ 即 } x_0 = (1 - \frac{b^2}{a^2}) \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$$\because x_1 \neq x_2, \therefore -a < \frac{x_1 + x_2}{2} < a, \text{ 得 } -\frac{a^2 - b^2}{a} < x_0 < \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

例 3、 已知双曲线 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$, 过 $M(1,1)$ 的直线交双曲线于 A 、 B 两点, 若 M 为弦 AB 中点,

求直线 AB 的方程。

解: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{2} = 1, \frac{x_2^2}{4} - \frac{y_2^2}{2} = 1,$

$$\therefore \frac{1}{4}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0, \text{ 又 } x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2,$$

$$\therefore \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{1}{2} = k_{AB}. \therefore y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1) \text{ 即 } y = \frac{1}{2}(x + 1).$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的方程是 } y = \frac{1}{2}(x + 1).$$

纵观以上几题, 确实让我们感受到了“设而不求”方法的优势, 大大降低解题的运算量, 优化解题过程。但它却并非“万能”, 我们不能盲目地使用该方法, 在使用时应适时地加以斟酌。

例 4、 已知椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$, 过点 $P(1,3)$ 能否作直线 l , 使 l 与椭圆交于 A 、 B 两点, 且点 P 是弦 AB

的中点? 若直线存在, 求出它的方程; 若不存在, 说明理由。

$$\text{解: 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 把 } A、B \text{ 坐标代入椭圆方程得: } \begin{cases} \frac{x_1^2}{3} + \frac{y_1^2}{6} = 1 & \text{--- (1)} \\ \frac{x_2^2}{3} + \frac{y_2^2}{6} = 1 & \text{--- (2)} \end{cases},$$

$$(1) - (2) \text{ 整理可得: } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}, \text{ 又 } P \text{ 是弦 } AB \text{ 的中点, } \therefore x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 6,$$

$$\therefore k_l = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -2 \cdot \frac{2}{6} = -\frac{2}{3}, \text{ 又 } l \text{ 过点 } P, \therefore l \text{ 的方程为 } 2x + 3y - 11 = 0$$

既然直线方程求出来了, 是不是就可以这样下结论: 存在这样的直线, 其方程为 $2x + 3y - 11 = 0$ 呢?

我们重新回头审视上面的例 3, 严密的做法应当把所求的直线 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ 代入 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ 检验,

知其满足 $\Delta > 0$ ，才能确定地下结论：直线 AB 的方程是 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 。

对于例 4，事实上，联立所求直线方程和椭圆方程：
$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1 \\ 2x + 3y - 11 = 0 \end{cases}$$
，消去 y ，整理后可得：

$22x^2 - 44x + 67 = 0$ ，其 $\Delta = -3960 < 0$ ，直线与椭圆并没有交点，即并不存在这样的直线。

至此，我们不禁对“设而不求”的点差法有些困惑：

问题 1：既然不存在这样的直线，可是为什么却可以把直线 $2x + 3y - 11 = 0$ 求出来？

其实，观察以上解题过程，我们注意到，求直线斜率 k_l 时利用了 $x_1 + x_2 = 2$ 及 $y_1 + y_2 = 6$ 这一条件，

而点 $P(1,3)$ 其实在椭圆外（满足 $\frac{1^2}{3} + \frac{3^2}{6} > 1$ ），所以椭圆上的任何两点（包括 A 、 B ）都不可能以 $P(1,3)$

为中点，即 $x_1 + x_2 = 2$ 及 $y_1 + y_2 = 6$ 不可能同时成立，所以上面求出的斜率 $k_l = -\frac{2}{3}$ 显然有误，当然所求的直线 $2x + 3y - 11 = 0$ 就不正确了。

问题 2：如何才能保证所求的直线 $2x + 3y - 11 = 0$ 符合题意？

事实上，问题的关键只需点 $P(1,3)$ 落于椭圆内部，则 $x_1 + x_2 = 2$ 及 $y_1 + y_2 = 6$ 便可同时成立，那么

所求的直线 $2x + 3y - 11 = 0$ 也就正确。而题中椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 显然不合，若把椭圆方程一般化为

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = m (m > 0)$ ，则只需 $m > \frac{11}{6}$ ，便可保证点 $P(1,3)$ 位于椭圆内部。

进一步观察以上“点差法”的解题步骤中“(1)-(2)”这一步，不难发现，该步骤与椭圆方程“

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ ”等号的右边是否为“1”无关，若把椭圆改为“ $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = m (m > 0)$ ”，所求得的直线方程

仍然为 $2x + 3y - 11 = 0$ 。所以只需 $m > \frac{11}{6}$ ，则点 $P(1,3)$ 便在椭圆内部，那对所有的椭圆

$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = m (m > \frac{11}{6})$ ，所求的直线 $2x + 3y - 11 = 0$ 均符合题意。

例 5、求过点 $P(0,2)$ 的直线被椭圆 $x^2 + 2y^2 = 2$ 所截弦的中点的轨迹方程。

解：（1）当过 $P(0,2)$ 的直线的斜率 k 存在时，设其方程为 $y = kx + 2$ ，

代入 $x^2 + 2y^2 = 2$ 中, 消去 y , 得 $(2k^2 + 1)x^2 + 8kx + 6 = 0$, 由 $\Delta > 0$, 得 $|k| > \frac{\sqrt{6}}{2}$ ---①

设直线与椭圆的两个交点为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 中点坐标为 $C(x, y)$, 则

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{4k}{2k^2 + 1}, \\ y = kx + 2 = \frac{2}{2k^2 + 1} \end{cases}, \text{ 消去参数 } k, \text{ 得 } x^2 + 2(y-1)^2 = 2$$

由①知, $|x| = \frac{4|k|}{2k^2 + 1} = \frac{4}{2|k| + \frac{1}{|k|}} < \frac{\sqrt{6}}{2}, y = \frac{2}{2k^2 + 1} \in (0, \frac{1}{2})$,

故所求弦中点的轨迹方程为 $x^2 + 2(y-1)^2 = 2$, 其中 $|x| < \frac{\sqrt{6}}{2}$, 且 $0 < y < \frac{1}{2}$ 。

(2) 当所做直线的斜率不存在时, 所截弦中点为 $C(0,0)$ 亦满足上述方程。

综上所述, 所求弦中点的轨迹方程为 $x^2 + 2(y-1)^2 = 2$, 其中 $|x| < \frac{\sqrt{6}}{2}$, 且 $0 \leq y < \frac{1}{2}$ 。

评注: 消参过程中, 应重视参数取值范围对其它相关变量的影响, 确保等价性。