

探求一类数列不等式问题的多角度证法

福建省南安市侨光中学 郑海萍

熟知，数列是特殊的函数，而不等式则是深刻认识函数与数列的重要工具，因此，数列的重心已经偏移到不等式的证明与求解中。2015 高考安徽（理）有这样一道题：

设 $n \in N^*$ ， x_n 是曲线 $y = x^{2n+3} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标，

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；(2) 记 $T_n = x_1^2 x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$ ，证明 $T_n \geq \frac{1}{4n}$ 。

解析：(1) $y' = (2n+2)x^{2n+1}$ ，当 $x=1$ 时， $y' = 2n+2$ ，

所以曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线为 $y - 2 = (2n+2)(x-1)$ ；

因此曲线 $y = x^{2n+2} + 1$ 在点 $(1, 2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标 $x_n = \frac{n}{n+1}$ ；

(2) 证法 1（放缩法 1）：由题设和(1)中的计算结果可知， $T_n = x_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 = (\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{4})^2 \cdots (\frac{2n-1}{2n})^2$ ，

当 $n=1$ 时， $T_1 = \frac{1}{4}$ ，

当 $n \geq 2$ 时，因为 $x_{2n-1}^2 = (\frac{2n-1}{2n})^2 = \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} > \frac{(2n-1)^2 - 1}{(2n)^2} = \frac{2n-2}{2n} = \frac{n-1}{n}$ ，

所以， $T_n > (\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n}$ ，

综上所述，对任意的 $n \in N^*$ ，均有 $T_n \geq \frac{1}{4n}$ 。

证法 2（放缩法 2）： $T_n = x_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 = (\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{4})^2 \cdots (\frac{2n-1}{2n})^2$ ，

当 $n=1$ 时， $T_1 = \frac{1}{4}$ ，

当 $n \geq 2$ 时，因为 $\frac{2n-1}{2n} > \frac{2n-2}{2n-1}$ ，所以 $(\frac{2n-1}{2n})^2 > \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-1}{2n}$ ，

则 $T_n = (\frac{1}{2})^2 (\frac{3}{4})^2 \cdots (\frac{2n-1}{2n})^2 > \frac{1}{4} \times (\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}) \times (\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}) \times \cdots \times (\frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-1}{2n}) = \frac{1}{4n}$ ，

综上所述，对任意的 $n \in N^*$ ，均有 $T_n \geq \frac{1}{4n}$ 。

评析：放缩法是证明此类问题的常用方法，但解题过程一是要注意放缩的尺度，二是要注意从哪一项开始放缩，这也是应用此方法的重难点。

证法 3（作商法）：由(1)知 $x_{2n-1}^2 = (\frac{2n-1}{2n})^2 = \frac{(2n-1)^2}{4n^2}$ ，令 $f(n) = 4nT_n = 4nx_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2$ ，

则 $f(n) > 0$ ；

$$\text{因为 } \frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{4(n+1)x_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 \cdot x_{2n+1}^2}{4nx_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2} = \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \frac{4n^2+4n+1}{4n^2+4n} > 1$$

所以 $f(n)$ 在 $n \in N^*$ 单调递增, 因此 $f(n) \geq f(1) = 4x_1^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$, 所以 $f(n) \geq 1$, 即 $T_n \geq \frac{1}{4n}$.

评析: 作商是证明不等式的另一常用方法, 而考虑原命题的等价变形则是常见也是关键之处。

证法 4 (数学归纳法): ①当 $n=1$ 时, $T_1 = \frac{1}{4}$, 命题成立。

②假设 $n=k(k \geq 1)$ 时, 不等式成立, 即 $T_k \geq \frac{1}{4k}$, 则

$$T_{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdots \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 \cdot \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2 \geq \frac{1}{4k} \times \left(\frac{2k+1}{2k+2}\right)^2$$

$$\text{即 } T_{k+1} \geq \frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \times \frac{1}{4(k+1)} = \frac{4k^2+4k+1}{4k^2+4k} \times \frac{1}{4(k+1)} > \frac{1}{4(k+1)},$$

所以当 $n=k+1$ 时, 不等式也成立, 综上①②可知, $T_n \geq \frac{1}{4n}$ 。

评析: 数学归纳法是一种直接而有效的解题方法, 在运用其它途径解题受阻时, 数学归纳法也不失为一种解题良方。

证法 5 (构造法): 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项积为 $P_n = \frac{1}{4n}$, 则当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{4}$, 当 $n \geq 2$ 时, $P_{n-1} = \frac{1}{4(n-1)}$,

于是 $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n-1}{n}$, 则

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } x_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = a_1,$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } x_{2n-1}^2 = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2, \text{ 那么 } x_{2n-1}^2 - a_n = \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{4n^2} > 0,$$

$$\therefore x_{2n-1}^2 > a_n, \quad x_{2(n-1)-1}^2 > a_{n-1}, \quad \cdots, \quad x_3^2 > a_2,$$

$$\therefore x_1^2 \cdot x_3^2 \cdots x_{2n-1}^2 > a_1 a_2 \cdots a_n = P_n = \frac{1}{4n}, \text{ 命题得证。}$$

评析: 此处抓住要证明的命题的左边的结构特点, 创造性地构造出一个新数列, 利用两个数列各项之间进行比较, 从而轻松解决问题。

纵观以上多种证明方法, 各有千秋。数列不等式是处于数列与不等式的知识交汇处, 它既有数列的结构与性质特征, 又有与不等式相关的思想方法。因此, 对于此类数列与不等式综合问题, 我们应当从多角度、多方位去思考, 开拓我们的数学视野, 深化我们对数列不等式的认识, 以便于可以站在更高的角度来研究数列不等式。