

构造函数法

福建省南安市侨光中学

尤新兴

导数已为大家所熟知,在导数的四则运算中,两函数的积和商的导数计算公式的应用在解题中时有出现,其中以导数为工具构造函数来解决问题更是重点,也是难点,那么怎样合理的构造函数就是解决问题的关键。

两函数的积的导数计算公式 $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, 充分抓住等式右边的结构特点,构造出等式左边的原函数。

例1、若函数 $y = f(x)$ 在 R 上可导且满足不等式 $x \cdot f'(x) > -f(x)$ 恒成立,且常数 a, b 满足 $a > b$, 求证: $a \cdot f(a) > b \cdot f(b)$ 。

解析:由已知得 $x f'(x) + f(x) > 0 \therefore$ 构造函数 $F(x) = xf(x)$,

则 $F'(x) = x f'(x) + f(x) > 0$, 从而 $F(x)$ 在 R 上为增函数,

$\therefore a > b \therefore F(a) > F(b)$ 即 $a \cdot f(a) > b \cdot f(b)$, 命题得证。

评析:此题函数构造直接,相对简单。但若构造不出一个原函数,其导数能与已知条件完全匹配时,则须构造一个“相似”函数。

例2、设函数 $f(x)$ 在 R 上的导函数为 $f'(x)$, 且 $2f(x) + xf'(x) > x^2$, 下面的不等式在 R 上恒成立的是: $A. f(x) > 0$ $B. f(x) < 0$ $C. f(x) > x$ $D. f(x) < x$

解析:由已知,令 $g(x) = x^2 f(x)$, 则 $g'(x) = x[2f(x) + xf'(x)]$, 显然, $x = 0$ 时, $g'(x) = 0$ 。

① 当 $x > 0$ 时,有 $2f(x) + xf'(x) = \frac{g'(x)}{x} > x^2 \Rightarrow g'(x) > 0$, 所以函数 $g(x)$ 单调递增,所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 从而 $f(x) > 0$ 。

② 当 $x < 0$ 时,有 $2f(x) + xf'(x) = \frac{g'(x)}{x} > x^2 \Rightarrow g'(x) < 0$, 所以函数 $g(x)$ 单调递减,所以当 $x < 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 从而 $f(x) > 0$ 。综上 $f(x) > 0$ 。故选 A 。

例3、设 $f(x)$ 是 R 上的可导函数, 且 $f(x) + f'(x) > 1, f(0) = 2016$, 则不等式 $e^x f(x) > e^x + 2015$ 的解集是_____。

解析:由 $f(x) + f'(x) > 1$, 从式子的左边结构可联想到 $[e^x f(x)]' = e^x [f(x) + f'(x)]$, 于是可构造函数 $g(x) = e^x f(x) - e^x$, 则 $g'(x) = e^x [f(x) + f'(x) - 1] \therefore g'(x) > 0$, 则函数 $y = g(x)$ 在定义上

单调递增, $\because e^x f(x) > e^x + 2015, \therefore g(x) > 2015$, 又 $g(0) = e^0 f(0) - e^0 = 2016 - 1 = 2015$, 则

$g(x) > g(0), \therefore x > 0$, 所以答案为 $(0, +\infty)$.

模型总结: 关系式为“加”型

$$(1) f'(x) + f(x) \geq 0 \quad \text{构造} [e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)]$$

$$(2) xf'(x) + f(x) \geq 0 \quad \text{构造} [xf(x)]' = xf'(x) + f(x)$$

$$(3) xf'(x) + nf(x) \geq 0 \quad \text{构造} [x^n f(x)]' = x^n f'(x) + nx^{n-1} f(x) = x^{n-1} [xf'(x) + nf(x)]$$

类似地, 对两函数的商的导数计算公式 $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, 充分利用等式右

边的分子的结构特点, 可构造出等式左边的原函数来解题。

例 4、 $f(x)$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且满足 $xf'(x) - f(x) \leq 0$, 对任意正数 a, b , 若 $a < b$ 则必有 ()

$$A、a \cdot f(b) \leq b \cdot f(a)$$

$$B、b \cdot f(a) \leq a \cdot f(b)$$

$$C、a \cdot f(a) \leq b \cdot f(b)$$

$$D、b \cdot f(b) \leq a \cdot f(a)$$

解析: 令 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 则 $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \leq 0$, 故 $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 由 $0 < a < b$ 有 $\frac{f(a)}{a} \geq \frac{f(b)}{b} \Rightarrow a \cdot f(b) \leq b \cdot f(a)$, 答案选 A.

例 5、已知函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的可导函数, 且 $f(x) < f'(x)$ 对于任意 $x \in R$ 恒成立, e 为自然对数的底数, 则 ()

$$A、f(1) > e \cdot f(0), f(2017) < e^{2017} \cdot f(0) \quad B、f(1) < e \cdot f(0), f(2017) < e^{2017} \cdot f(0)$$

$$C、f(1) > e \cdot f(0), f(2017) > e^{2017} \cdot f(0) \quad D、f(1) < e \cdot f(0), f(2017) > e^{2017} \cdot f(0)$$

解析: 由 $f(x) < f'(x)$ 得 $f'(x) - f(x) > 0$, 所以 $\frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0$, 设函数 $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 则

$$F'(x) = \frac{f'(x) \cdot e^x - f(x) \cdot (e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} > 0,$$

$\therefore F(x)$ 在 R 上单调递增, 则 $F(1) > F(0)$, 即 $\frac{f(1)}{e^1} > \frac{f(0)}{e^0}, \therefore f(1) > e \cdot f(0)$,

$F(2017) > F(0)$, 即 $\frac{f(2017)}{e^{2017}} > \frac{f(0)}{e^0}, \therefore f(2017) > e^{2017} \cdot f(0)$, 答案选 C.

模型总结: 关系式为“减”型

$$(1) \quad f'(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{构造} \left[\frac{f(x)}{e^x} \right]' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$$

$$(2) \quad xf'(x) - f(x) \geq 0 \quad \text{构造} \left[\frac{f(x)}{x} \right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$(3) \quad xf'(x) - nf(x) \geq 0 \quad \text{构造} \left[\frac{f(x)}{x^n} \right]' = \frac{x^n f'(x) - nx^{n-1} f(x)}{(x^n)^2} = \frac{xf'(x) - nf(x)}{x^{n+1}}$$

函数与导数的结合，往往不是简单地考查公式的应用，而是与数学思想方法相结合，突出考查函数与方程思想、有限与无限思想等，所考查的问题具有一定的综合性. 解题技巧是构造辅助函数，把不等式的证明转化为利用导数研究函数的单调性或求最值，从而证得不等式，而如何根据不等式的结构特征构造一个可导函数是用导数证明不等式的关键。