

追本溯源 拓展探究

一道课本习题的探究

福建省南安市侨光中学 (362314) 林志森

一、重温习题，深入研究

人教社 A 版必修 4, P_{138} B 组习题第 3 题:

观察以下各等式:

$$\sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4}.$$

分析上述各式的共同特点, 写出能反映一般规律的等式, 并对等式的正确性作出证明.

分析解答: 反映一般规律的等式是:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin \alpha \cos(\alpha + 30^\circ) = \frac{3}{4}$$

本题是开放型问题, 答案表述形式不唯一, 还可以是:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin \alpha \cos \beta = \frac{3}{4}, \text{ 其中 } \beta - \alpha = 30^\circ, \text{ 等等.}$$

思考过程是从角, 三角函数名称, 式子结构特征三方面寻找共同特点, 从而作出归纳得出:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin \alpha \cos \beta = \frac{3}{4}, \text{ 其中 } \beta - \alpha = 30^\circ.$$

证明: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta + \sin \alpha \cos \beta$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2(\alpha + 30^\circ) + \sin \alpha \cos(\alpha + 30^\circ)$$

$$= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos(2\alpha + 60^\circ)}{2} + \sin \alpha (\cos \alpha \cos 30^\circ - \sin \alpha \sin 30^\circ)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \cos(2\alpha + 60^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\alpha - \frac{1}{4} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$= 1 - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}.$$

该题考查同角三角函数公式、二倍角公式等基础知识, 考查运算求解能力、抽象概括能力、推理论证能力, 考查特殊与一般思想、化归与转化思想.

二、重新思考, 意外收获

对课本习题进一步深入探究如下:

人教社 A 版必修 4, P_{138} B 组习题第 3 题:

$$\textcircled{1} \sin^2 30^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 30^\circ + \sin^2 30^\circ - 2 \cos 120^\circ \sin 30^\circ \sin 30^\circ = \frac{3}{4} = \sin^2 120^\circ;$$

注: $\cos 60^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \sin 30^\circ$, $1 = -2 \cos 120^\circ$.

按同样方法对 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$ 式子变形处理如下:

$$\textcircled{2} \sin^2 20^\circ + \cos^2 50^\circ + \sin 20^\circ \cos 50^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ - 2 \cos 120^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ = \frac{3}{4} = \sin^2 120^\circ;$$

$$\textcircled{3} \sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{3}{4};$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 15^\circ + \sin^2 45^\circ - 2 \cos 120^\circ \sin 15^\circ \sin 45^\circ = \frac{3}{4} = \sin^2 120^\circ.$$

通过上面 3 个式子化简后, 隐约看到余弦定理的影子.

三、追本溯源, 一般拓展

由化简后的式子结构与余弦定理相似, 从而类比推理联想到余弦定理.

习题中第 3 个等式: $\sin^2 15^\circ + \cos^2 45^\circ + \sin 15^\circ \cos 45^\circ$ 化为 $\sin^2 15^\circ + \sin^2 45^\circ$

$- 2 \cos 120^\circ \sin 15^\circ \sin 45^\circ$. 在直径为 1 的圆 O 的内接 $\triangle ABC$ 中, 设 $A = 15^\circ$, $B = 45^\circ$, 则

$a = BC = \sin 15^\circ$, $b = AC = \sin 45^\circ$, $C = 120^\circ$, 所以 $\sin^2 15^\circ + \sin^2 45^\circ$

$$- 2 \cos 120^\circ \sin 15^\circ \sin 45^\circ = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2 = \frac{3}{4} = \sin^2 120^\circ.$$

将正弦定理 $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, 代入余弦定 $a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$,

化简得 $\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \cos C \sin A \sin B = \sin^2 C$, 其中 $A + B + C = 180^\circ$. (*)

其实结论 (*) 还可以推广: 结论 (*) 中的角 A 、 B 、 C 可以为任意角, 只要满足

$A + B + C = (2k + 1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 即可.

证明: $\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \cos C \sin A \sin B$

$$= \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \cos[(2k + 1)\pi - (A + B)] \sin A \sin B$$

$$= \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \cos(A + B) \sin A \sin B$$

$$= \sin^2 A + \sin^2 B + 2(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \sin A \sin B$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 A + \sin^2 B - 2 \sin^2 A \cos^2 B + 2 \sin A \cos A \sin B \cos B \\
&= (\sin^2 A - \sin^2 A \cos^2 B) + (\sin^2 B - \sin^2 A \cos^2 B) + 2 \sin A \cos A \sin B \cos B \\
&= \sin^2 A \sin^2 B + \sin^2 B \cos^2 A + 2 \sin A \cos A \sin B \cos B \\
&= (\sin A \sin B + \sin B \cos A)^2 \\
&= \sin^2 (A + B) \\
&= \sin^2 [(2k+1)\pi - C] \\
&= \sin^2 C
\end{aligned}$$

所以 $\sin^2 A + \sin^2 B - 2 \cos C \sin A \sin B = \sin^2 C$ ，其中 $A + B + C = (2k+1)\pi (k \in \mathbb{Z})$ 。

从特殊情况归纳，到类比联想到余弦定理，得出一般结论，做到了追本溯源。

四、一点感悟，激活教材

数学教材凝聚了编者的智慧和结晶，教材中的内容具有基础性、典型性和权威性，它是教师教学的基础和前提，也是命题的立足点。数学教材中的例题习题都是编者经过精心设计、反复揣摩后敲定的，大部分题目比较基础，入口浅，有利于学生夯实基础知识；同时，教材中的一些例题习题看似平淡无奇，却隐藏着精彩背景，可以进行深入挖掘与拓展。特级教师任勇先生指出：“教学中，要活用教材，吃透教材，激活教材，改组教材，拓展教材”。数学教学中，不仅仅认真钻研教材，用好教材，还要进一步开发教材，拓展教学功能，挖掘教材的营养成分，让学习中跳出题海，培养学生钻研精神，提高学习效率。