

运用“点在曲线上”解决问题

福建省南安市侨光中学 尤新兴

熟知，如果某一点的坐标满足一个方程，那么该点就在此方程所对应的曲线上。如能充分抓住这一概念的要害——点在曲线上，那么，有些问题解决起来就能事半功倍。

例 1、直线 l 被两直线 $l_1: 4x + y + 6 = 0, l_2: 3x - 5y - 6 = 0$ 截得的线段的中点恰好是坐标原点，求直线 l 的方程。

解析：设直线 l 与 l_1, l_2 分别交于 A, B 两点，由于 A, B 两点关于原点对称，可设

$$A(x_0, y_0), B(-x_0, -y_0), \text{ 因为 } A, B \text{ 分别在 } l_1, l_2 \text{ 上, } \therefore \begin{cases} 4x_0 + y_0 + 6 = 0 \\ -3x_0 + 5y_0 - 6 = 0 \end{cases}, \text{ 两式相加得:}$$

$x_0 + 6y_0 = 0$ ，易知 A, B 两点的坐标均满足方程 $x + 6y = 0$ ，所以 A, B 两点都在直线 $x + 6y = 0$ 上，即所求直线 l 的方程为 $x + 6y = 0$ 。

例 2、过点 $P(2, 1)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的两条切线 PA, PB ，其中 A, B 为切点，求直线 AB 的方程。

解析：设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由于过圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $x_0x + y_0y = r^2$ ，则：

过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 $A(x_1, y_1)$ 的切线方程为 $l_{PA}: x_1x + y_1y = 1$ ，

过圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点 $B(x_2, y_2)$ 的切线方程为 $l_{PB}: x_2x + y_2y = 1$ ，

把点 $P(2, 1)$ 分别代入即得： $2x_1 + y_1 = 1, 2x_2 + y_2 = 1$ ，

即 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 两点的坐标均满足方程 $2x + y = 1$ ，

$\therefore$ 点 A, B 都在直线 $2x + y = 1$ 上，即所求直线 AB 的方程为 $2x + y - 1 = 0$ 。

例 3、设 A, B 是椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 上的两点，点 $N(1, 3)$ 是线段 AB 的中点，线段 AB 的垂直平分线与椭圆相交于 C, D 两点，

① 确定 λ 的取值范围，并求直线 AB 的方程；

② 试判断是否存在这样的 λ ，使得 A, B, C, D 四点在同一个圆上？并说明理由。

解析：① $\lambda > 12$ ，直线 AB 的方程为 $x + y - 4 = 0$ ，过程略。

② A, B, C, D 四点要在同一个圆上，则需 A, B, C, D 四点满足一个二元二次方程；事实上，由已知以及第①题的结论易得 C, D 所在直线的方程为 $x - y + 2 = 0$ ，从而可得 A, B, C, D 四点所满

足的一个二元二次方程为 $(x+y-4)(x-y+2)=0$ ，即 $x^2 - y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ ，由于 $A、B、C、D$ 四点也在椭圆 $3x^2 + y^2 = \lambda$ 上，则 $A、B、C、D$ 便满足方程 $(3x^2 + y^2 - \lambda) - (x^2 - y^2 - 2x + 6y - 8) = 0$ ，整理可得：

$(x + \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{\lambda - 3}{2}$ ，因此，当 $\lambda > 12$ ， $A、B、C、D$ 四点就落在以 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 为圆心， $\sqrt{\frac{\lambda - 3}{2}}$ 为半径的圆上。

评析：以上几例均多次用到“点在曲线上”这一基本关系，结合曲线和方程的概念，所体现的正是“设而不求”的整体处理思想，整个求解过程需要有强烈的目标意识，在大大缩减计算量的同时，问题也迎刃而解了。

例 4、若实数 a, b, c, d 满足 $\frac{2a^2 - \ln a}{b} = \frac{3c - 2}{d} = 1$ ，则 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为_____。

解析：由 $\frac{2a^2 - \ln a}{b} = 1$ 可得： $b = 2a^2 - \ln a$ ，即点 (a, b) 在曲线 $y = 2x^2 - \ln x$ 上，

由 $\frac{3c - 2}{d} = 1$ 可得： $d = 3c - 2$ ，即点 (c, d) 在直线 $y = 3x - 2$ 上，那么，问题所求

$(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值即为求曲线 $y = 2x^2 - \ln x$ 上的点与直线 $y = 3x - 2$ 上的点之间距离的最小值的平方。明确了这层意思以后，便可利用导数的方法求出曲线 $y = 2x^2 - \ln x$ 上与直线 $y = 3x - 2$ 平行的切线方程，进一步可得 $(a - c)^2 + (b - d)^2$ 的最小值为 $\frac{1}{10}$ 。

纵观上述的两种解题情形，不难发现，一个别致的解题方法可能就蕴含在某个相关的概念中，这就要求我们对相关概念有本质深刻的认识，方能以不变应万变。