

# 以图导思方向明 巧妙解答时间少

福建省南安市侨光中学 梁志永

距离高考还有二个多月的时间，可以说到了寸时寸金阶段。面对越来越近的月考，如何充分利用宝贵的每一天来提高复习效率？如何根据数学学科特点来复习？如何在数学考试过程中做到“小题小解”腾出更多时间来用于解答题？我在泉州市 2016 届普通高中毕业班质量检查后就一直在思考这个问题，对一些客观题心中有数不如心中有数图，数学少不了图形，数学图形直观形象，清晰明了，还能把题目中的条件、结论以及它们之间的关系精确地反映出来，我们要巧妙地利用图形的这一特点，以图导思，减少解题时间。

数学是抽象的。初中数学比较感性，而高中数学注重理性认识、注重理性思维，明显难了很多。因此，很多原本在初中数学成绩很好的同学，到了高中就感到吃力了。怎么把抽象变为具体了？——画图

图是数学的生命线，能不能用图支撑思维活动是能否学好数学的关键<sup>[1]</sup>。无论是几何还是代数，拿到题的第一件事都应该是画图，心中有数不如心中有数图。有的时候，一些简单题只要把图画出来，答案就直接出来了。遇到难题时就更应该画图，图可以清楚地呈现出已知条件<sup>[1]</sup>。而且解难题时至少一问画一个图，这样看起来清晰，做题的时候也好理顺思路<sup>[1]</sup>。

曾记得数学家华罗庚先生曾对数形结合的思想和方法赋诗：“数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞；数无形时少直觉，形少数时难入微；数形结合百般好，隔离分家万事休；切莫忘，几何代数流一体，永远联系莫分离<sup>[2]</sup>。”

首先我们要在脑中有画图的意思，形成条件反射，拿到一道数学题就先画图。而且要有用图的意思，画了图而不用，等于没画。有了画图、用图的意思后，还要具备画图的技能。有人说，画图还不简单啊，学数学有谁不会画图？但是现实中很多同学画图没有好习惯，不会用画图工具。圆规、尺子不会用，画出图来非常难看。老师不是要求大家把图画的多漂亮，而是清晰、干净、准确，这样才会对做题有帮助。改正一下自己在画图时的一些坏习惯，就能迅速提高数学的学习能力<sup>[1]</sup>。

考试大纲强调：“在高考中，充分利用选择题和填空题的题型特点，为考查数形结合的思想提供了方便，能突出考查考生将复杂的数量关系转化为直观的几何图形问题来解决的意识<sup>[3]</sup>。”

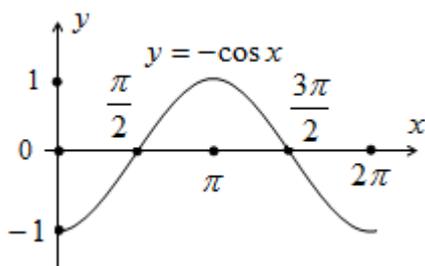
所谓数形结合，就是根据数与形之间的对应关系，通过数与形的相互转化来解决数学问题的思想，实现数形结合，而数形结合的思想方法是中学数学中所蕴藏的重要思想方法之一，因此我们应把数形结合的思想方法渗透到数学课堂教学之中<sup>[4]</sup>。数形结合作为一种重要的数学思想方法历年来一直是高考考察的重点之一。使用数形结合的方法，很多问题能迎刃而解且解法简捷。

下面笔者以泉州市 2016 届普通高中毕业班质量检查文科数学试题<sup>[5]</sup>举例说明：

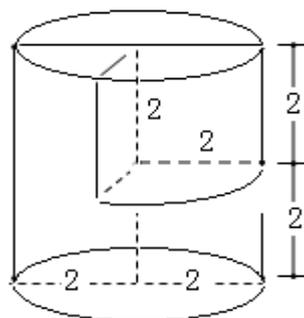
**第 6 题.** 下列函数既是偶函数，又在  $(0, \pi)$  上单调递增的是

- A.  $y = |\sin x|$       B.  $y = \tan|x|$       C.  $y = \cos 2x$       D.  $y = -\cos x$

【思路探寻】直接考察  $y = -\cos x$  的图象而得解. 选 D.



第(6)题图

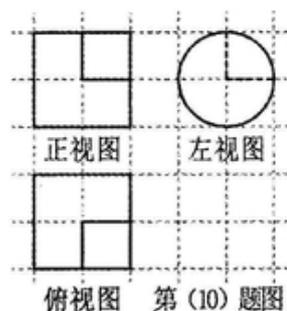


第(10)题图

第10题. 如图, 网格纸上小正方形的边长为2, 粗线画出的是某几何体的三视图则该几何体的体积是

- A.  $6\pi$     B.  $7\pi$     C.  $12\pi$     D.  $14\pi$

【思路探寻】受三视图的启发, 据三视图, 想象感知、分析校正、操作确认得原实物图在一个水平横放的底面半径为2, 高为4的圆柱中, 在其前方、上侧的右侧挖去  $\frac{1}{8}$ , 余下的部分为该几何体的体积为  $\frac{7}{8} \times (\pi \cdot 2^2) \times 4 = 14\pi$  [5]. 选 D.

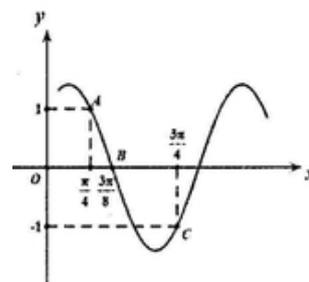


俯视图 第(10)题图

第11题. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \phi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\phi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图

像如图所示, 若  $\tan \alpha = 3$ , 则  $f\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)$  的值为

- A.  $-\frac{3}{5}$     B.  $-\frac{4}{5}$     C.  $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$     D.  $-\frac{4\sqrt{2}}{5}$



第(11)题图

【思路探寻】充分利用三角函数图象几何特征中所隐含的代数性质信息: 半周期  $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , 周期  $\pi$ ,

求得  $\omega = 2$ ; 据图象下降途中的零点  $(\frac{3\pi}{8}, 0)$ , 得  $2 \times \frac{3\pi}{8} + \phi = (2k+1)\pi$ , 因  $|\phi| < \frac{\pi}{2}$ ,

故  $k$  取 0,  $\phi = \frac{\pi}{4}$  [5]; 由图象过点 A, 求得  $A = \sqrt{2}$ . 所以

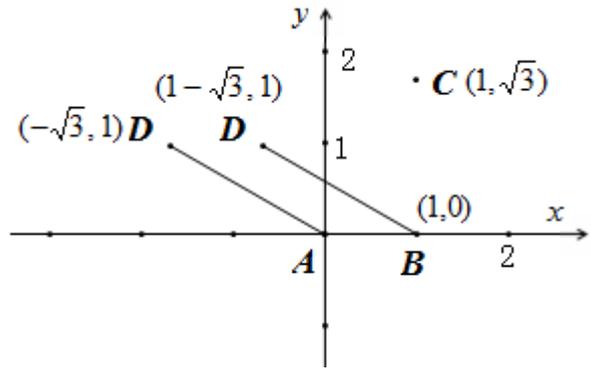
$$f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right). \quad f\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \cos 2\alpha, \quad \text{因 } \tan \alpha = 3,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{4}{5}, \quad \text{所以, } f\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} \cos 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{5}. \quad \text{选 D.}$$

第12题. 已知四边形  $ABCD$  的对角线相交于一点,  $\overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BD} = (-\sqrt{3}, 1)$  则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$  的取值范围是

- A. (0,2)    B. (0,4]    C. [-2,0)    D. [-4,0)

【思路探寻】数形结合，在满足“ $|\overline{AC}|=|\overline{BD}|=2$ ，且 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $ABCD$ 的对角线相交于一点”要求的情况下，固定 $\overline{AC}$ 位置，移动 $\overline{BD}$ 位置，考察各极端（极限）位置上 $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ 的取值情况，结合选择支判断选项可得解<sup>[5]</sup>。故选C。

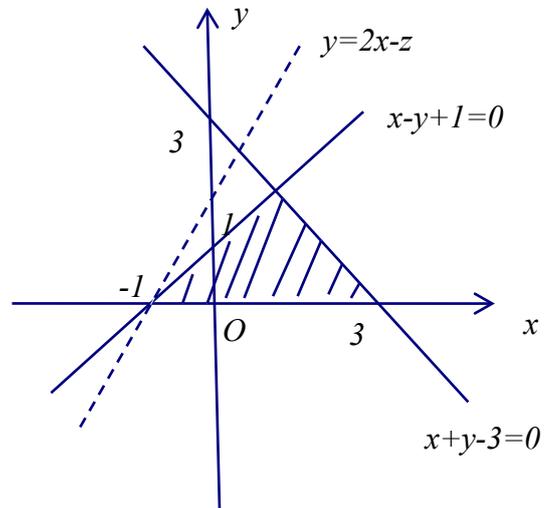


第13题. 设 $x, y$ 满足约束条件 $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = 2x - y$ 的最小值为\_\_\_\_\_

- (A) -3    (B) -2    (C) -1    (D) 2

【思路探寻】由 $\begin{cases} y \geq 0, \\ x - y + 1 \geq 0, \\ x + y - 3 \leq 0, \end{cases}$ 作出可行域如图所示，目

标函数 $z = 2x - y$ 在点 $(-1,0)$ 处取到最小值-2



第14题. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \lg(x+1), & x \geq 0 \\ -x^3, & x < 0 \end{cases}$ ，则使得 $f(x) \leq 1$ 成立的 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_

立的 $x$ 的取值范围是\_\_\_\_\_

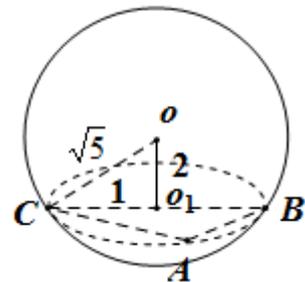
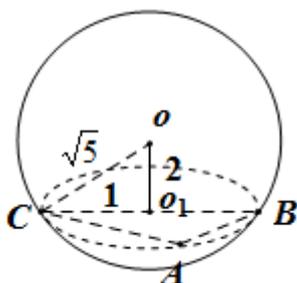
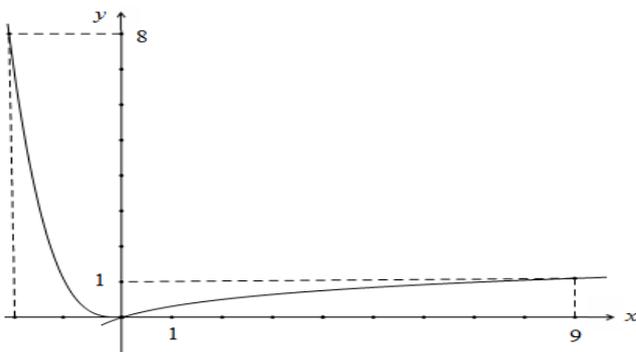
【思路探寻】 $\begin{cases} x \geq 0, \\ \lg(x+1) \leq 1, \end{cases}$ 得 $0 \leq x \leq 9$ ，解

$\begin{cases} x < 0, \\ -x^3 \leq 1, \end{cases}$ 得 $-1 \leq x < 0$ ，故 $f(x) \leq 1$ 的解为

$[-1,9]$ .

也可通过考察分段函数

$f(x) = \begin{cases} \lg(x+1), & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$



第(15)题图

第(14)题图

**第15题.** 已知  $A, B, C$  在球  $O$  的球面上,  $AB=1, BC=2, \angle ABC = 60^\circ$ , 且点  $O$  到平面  $ABC$  的距离为 2, 则球  $O$  的表面积为\_\_\_\_\_.

**【思路探寻】** 如图,  $\triangle ABC$  中用余弦定理求得  $AC = \sqrt{3}$ , 据勾股定理得  $\angle BAC$  为直角, 故  $BC$  中点  $O_1$  即  $\triangle ABC$  所在小圆的圆心;  $OO_1 \perp$  面  $ABC$ , 在直角三角形  $OO_1B$  中求得球的半径为  $\sqrt{5}$ ; 计算球  $O$  的表面积为  $20\pi$  [5].

总之, 数学离不开图, 图是无声的语言, 图是思维的起点, 图是探究的源泉。从图形中获取有效信息, 再回到数学严密的逻辑上去推理论证, 是“以形助数”的具体表现, 值得我们细心体会[6]。

**参考文献:**

- [1] 张开征. 心中有数不如心中有图. 《今日中学生》 2012 年 Z1 期
- [2] 李花花. 《高中数学教学中运用数形结合提高解题能力的研究》 - 《中国优秀硕士学位论文全文数据库》 - 2008
- [3] 张彩. 《浅析高考数学中的数形结合思想》 - 《试题与研究: 教学论坛》 - 2014
- [4] 刘新福. 《浅谈在新课标的数学教学中数学思想的渗透》 - 《科技创新导报》 - 20092
- [5] 《福建省泉州市 2016 届高中毕业班 3 月质量检查数学(文)试题(解析版).doc》
- [6] 李红春. 以图导思方向明, 完美解答自然生. 《中学数学》 2016 年 7 月上 47-48