

圆锥曲线中不等关系的建立策略

福建省南安市侨光中学 362314 郭远明

在有关以解析几何为载体的圆锥曲线的参数范围问题、最值问题、存在性问题中, 求解参变量的范围问题, 是圆锥曲线中一类常见的题型, 这类问题将几何、函数、不等式等知识点有机地结合在一起, 涉及的知识范围广、条件隐含深、运算难度大、能力要求高, 综合考查学生分析、应用综合知识解决问题的能力, 不少学生对这类问题处理感到困难, 不知要从何入手, 其实其入口的途径, 均是一个不等关系, 而解决这类问题的核心是根据题意构造不等关系. 如何合理构建不等式是关键, 为此, 本文介绍不等关系构建的几种方法与技巧, 供参考.

一、利用直线与曲线有两个交点, 二次方程有两个不同的解, 判别式要大于 0, 建立不等关系

例 1. 过点 B (2, 0) 的直线 l (斜率不等于零) 与椭圆 C: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于不同的两点 E、F (E 在 B、F 之间), 试求 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OBF$ 面积之比的取值范围.

解: 如图, 由题意知直线 l 的斜率存在且不为零, 设 l 方程为: $y = k(x-2) (k \neq 0)$ ①,

将①代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 中, 整理得: $(2k^2 + 1)y^2 + 4ky + 2k^2 = 0$,

因为直线 l 与轨迹 C 有两个不同的交点, 所以 $\Delta > 0$,

由 $\Delta > 0$, 及 $k \neq 0$ 得: $0 < k^2 < \frac{1}{2}$. 设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$

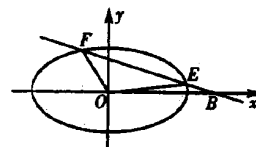
则 $y_1 + y_2 = -\frac{4k}{2k^2 + 1}, y_1 y_2 = \frac{2k^2}{2k^2 + 1}$, ②, 令 $\frac{S_{\triangle OBE}}{S_{\triangle OBF}} = \lambda$,

则 $\frac{1}{2} |OB| |y_1| = \frac{1}{2} |OB| |y_2| \lambda$, 又 $y_1 y_2 > 0$, 所以 $y_1 = \lambda y_2$ ③,

由②③消去 y_1, y_2 得: $\frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} = \frac{8}{1 + 2k^2}$, 又 $0 < k^2 < \frac{1}{2}$, 所以 $4 < \frac{(\lambda + 1)^2}{\lambda} < 8$

结合 $0 < \lambda < 1$, 解得: $3 - 2\sqrt{2} < \lambda < 1$, 所以 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OBF$ 面积之比的取值范围是: $(3 - 2\sqrt{2}, 1)$.

点评: 因直线 EF 与椭圆 C 有两个不同的交点, 所以 $\Delta > 0$, 由此解得 k 的取值范围, 再由 k 的取值范围, 建立 λ 的不等关系式, 解此不等式, 可得 λ 的取值范围, 从而解决问题.



二、利用点与曲线的位置关系, 建立不等关系

当点 $P(x_0, y_0)$ 在曲线上运动时, 则点 P 的横 (纵) 坐标就有范围的限制, 如点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆上, 就有: $-a \leq x_0 \leq a, (-b \leq y_0 \leq b)$, 于是可利用点 P 的横 (纵) 坐标的取值范围, 建立目标参数 (式子) 的不等关系, 从而解决问题. 因此在例 1 中的第二步, 就有以下的解法:

解法 2: 设 $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BF}$, $(0 < \lambda < 1)$ 则

$y_1 = \lambda y_2$ ①, $x_1 - 2 = \lambda(x_2 - 2)$ ②, 又 $x_1^2 + 2y_1^2 = 2$ ③, $x_2^2 + 2y_2^2 = 2$ ④,

由③ - λ^2 ④得: $x_1^2 - \lambda^2 x_2^2 + 2(y_1^2 - \lambda^2 y_2^2) = 2(1 - \lambda^2)$

结合①②化简得: $x_1 + \lambda x_2 = 1 + \lambda$ ⑤, 由②⑤得: $2x_1 = 3 - \lambda$, $\therefore |x_1| < \sqrt{2}$,

$\therefore |3 - \lambda| < 2\sqrt{2}$, 又 $0 < \lambda < 1$, 解得: $3 - 2\sqrt{2} < \lambda < 1$, 所以 $\triangle OBE$ 与 $\triangle OBF$ 面积之比的取值范围是:

$$(3-2\sqrt{2}, 1).$$

点评 点 E 在椭圆 C 上, 就有 $-\sqrt{2} < x_1 < \sqrt{2}$, 由此建立关于参数 λ 式子的不等关系为 $|3-\lambda| < 2\sqrt{2}$, 解此不等式, 可得 λ 的取值范围, 从而解决问题.

三、利用三角形中的边角性质关系, 建立不等关系

利用平面几何知识, 充分挖掘几何条件, 利用平面几何中的有关知识建立不等关系, 如不同的三个点在曲线上时, 就可利用三角形中任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 建立不等关系

例 2. 已知双曲线 C: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的两个焦点为 F_1, F_2 , 若 P 为双曲线 C 上一点, 且 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 求双曲线 C 离心率的取值范围.

解: 由 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$, $|PF_1| = 2|PF_2|$ 得: $|PF_1| = 4a, |PF_2| = 2a$

又 $|PF_1| + |PF_2| \geq |F_1F_2| = 2c$, 所以 $6a \geq 2c, 3 \geq \frac{c}{a} = e$, 又 $e > 1$, 所以 $1 < e \leq 3$

点评: 利用 $\triangle PF_1F_2$ 的三边, 建立 $|PF_1| + |PF_2| \geq |F_1F_2|$ 不等关系; 也可挖掘双曲线的图象性质, 建立 $|PF_2| \geq |F_2Q|$, 即 $2a \geq c - a$ 不等关系; 也可利用点 $P(x_0, y_0)$ 的横坐标建立 $x_0 \geq a$, 即 $x_0 = \frac{3a}{e} \geq a$ 不等关系. 都可以解决问题.

四、利用圆中有关性质, 建立不等关系

利用点 O 在以 AB 为直径的圆外, 且 A, B, O 三点不共线, 则 $\angle AOB$ 为锐角, 于是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$, 建立不等关系式; 同理点 O 在以 AB 为直径的圆内, 且 A, B, O 三点不共线, 则 $\angle AOB$ 为钝角, 于是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$, 建立不等关系式.

例 3. 设 F_1, F_2 分别是椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点.

(I) 若 P 是该椭圆上的一个动点, 求 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最大值和最小值;

(II) 设过定点 $M(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆交于不同的两点 A、B, 且点 O 在以 AB 为直径的圆外 (其中 O 为坐标原点), 求直线 l 的斜率 k 的取值范围.

解: (I) 易知 $a = 2, b = 1, c = \sqrt{3}$, 所以 $F_1(-\sqrt{3}, 0), F_2(\sqrt{3}, 0)$, 设 $P(x, y)$, 则

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-\sqrt{3} - x, -y) \cdot (\sqrt{3} - x, -y) = x^2 + y^2 - 3 = x^2 + 1 - \frac{x^2}{4} - 3 = \frac{1}{4}(3x^2 - 8)$$

因为 $x \in [-2, 2]$, 故当 $x = 0$ 时, 即点 P 为椭圆短轴端点时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 有最小值 -2

当 $x = \pm 2$, 即点 P 为椭圆长轴端点时, $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 有最大值 1

(II) 显然直线 $x = 0$ 不满足题设条件, 可设直线 $l: y = kx - 2, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 将 $y = kx - 2$ 代入椭圆中, 消去 y, 整理得: $(4k^2 + 1)x^2 + 16kx + 12 = 0$

由 $\Delta > 0$, 得: $k < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $k > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ①, 且 $x_1 + x_2 = -\frac{16k}{4k^2 + 1}, x_1x_2 = \frac{12}{4k^2 + 1}$,

因为点 O 在以 AB 为直径的圆外, 且 A, B, O 三点不共线, 所以 $\angle AOB$ 为锐角, 所以

$$\cos \angle AOB > 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0, \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1x_2 + y_1y_2 > 0$$

$$\text{又 } y_1y_2 = (kx_1 + 2)(kx_2 + 2) = k^2x_1x_2 + 2k(x_1 + x_2) + 4 = \frac{-4k^2 + 4}{4k^2 + 1}$$

所以 $\frac{12}{4k^2 + 1} + \frac{-4k^2 + 4}{4k^2 + 1} > 0$, 即 $k^2 < 4$, $\therefore -2 < k < 2$ ②

故由①、②得 $-2 < k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $\frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2$, 故所求 k 的范围是: $-2 < k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 或 $\frac{\sqrt{3}}{2} < k < 2$

点评: 在问题 (I) 中, 利用利用点 $P(x_0, y_0)$ 的横坐标的范围建立不等关系. 在问题 (II) 中, 利用点 O 在以 AB 为直径的圆外, 且 A, B, O 三点不共线, 所以 $\angle AOB$ 为锐角, 于是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$, 建立不等关系式. 同理点 O 在以 AB 为直径的圆内, 且 A, B, O 三点不共线, 则 $\angle AOB$ 为钝角, 于是 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} < 0$, 建立不等关系式.

五、利用基本不等式, 建立不等关系

当所涉及的参变量出现有关参变量式子的积或和为定值时, 可考虑利用基本不等式, 建立不等关系

例 4. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 内接矩形 $ABCD$, 求矩形 $ABCD$ 的面积的最大值.

解: 不妨设点 $A(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$) 位于第一象限, 则矩形 $ABCD$ 的面积 $S = 4x_0 \cdot y_0$,

因为点 $A(x_0, y_0)$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上, 所以 $1 = \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 \geq 2\sqrt{\frac{x_0^2}{4} y_0^2} = x_0 \cdot y_0$, 所以 $S = 4x_0 \cdot y_0 \leq 4$,

当且仅当 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, $\frac{x_0^2}{4} = y_0^2$, 即 $x_0 = \sqrt{2}, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时取等号, 所以矩形 $ABCD$ 的面积的最大值为 4

点评: 利用基本不等式, 建立目标式子 $x_0 y_0$ 的不等关系, 从而解决了问题.

以上总结了几种圆锥曲线不等关系的建立策略, 它们的形式各异, 各有千秋, 但均揭示了问题的本质, 抓住了问题的要害, 对于具体试题, 要结合具体情况, 合理选择适当的方法.